



Proposte di prova finale

Quando l'Analisi Matematica osserva il mondo

Lorenzo Tentarelli

lorenzo.tentarelli@polito.it

3 marzo 2022





Quando l'Analisi Matematica... cerca "chi fa meglio"

Quando l'Analisi Matematica... cerca "chi fa meglio"

Necessità fondamentale: utilizzare al meglio le proprie risorse. Nell'Analisi Matematica è codificata dal cosiddetto **Calcolo delle Variazioni**.

Quando l'Analisi Matematica... cerca "chi fa meglio"

Necessità fondamentale: utilizzare al meglio le proprie risorse. Nell'Analisi Matematica è codificata dal cosiddetto **Calcolo delle Variazioni**.

- ▶ Problema più antico (**Virgilio?**): *data una corda di lunghezza fissata, come racchiudere la massima area possibile?*

Quando l'Analisi Matematica... cerca "chi fa meglio"

Necessità fondamentale: utilizzare al meglio le proprie risorse. Nell'Analisi Matematica è codificata dal cosiddetto **Calcolo delle Variazioni**.

- ▶ Problema più antico (**Virgilio?**): *data una corda di lunghezza fissata, come racchiudere la massima area possibile?* **Problema di Didone**

Quando l'Analisi Matematica... cerca "chi fa meglio"

Necessità fondamentale: utilizzare al meglio le proprie risorse. Nell'Analisi Matematica è codificata dal cosiddetto **Calcolo delle Variazioni**.

- Problema più antico (**Virgilio?**): *data una corda di lunghezza fissata, come racchiudere la massima area possibile?* **Problema di Didone**

Proposta tesi: **Problemi Isoperimetrici (Dovetta–Tentarelli)**.



mitchtestone.blogspot.com/2012/08/roman-carthage.html

Quando l'Analisi Matematica... cerca "chi fa meglio"

Necessità fondamentale: utilizzare al meglio le proprie risorse. Nell'Analisi Matematica è codificata dal cosiddetto **Calcolo delle Variazioni**.

- ▶ **Convergenza variazionale (De Giorgi)**: *data una quantità dipendente da un parametro, quale convergenza preserva le configurazioni minime?*

Quando l'Analisi Matematica... cerca "chi fa meglio"

Necessità fondamentale: utilizzare al meglio le proprie risorse. Nell'Analisi Matematica è codificata dal cosiddetto **Calcolo delle Variazioni**.

- Convergenza variazionale (**De Giorgi**): *data una quantità dipendente da un parametro, quale convergenza preserva le configurazioni minime?*

Proposta tesi: **Γ -convergenza (Morandotti)**.



Chantas-Galatsanos-Likas-Saunders, Doi:10.1109/TIP.2008.2002828 (2008)



Quando l'Analisi Matematica... osserva le popolazioni

Quando l'Analisi Matematica... **osserva le popolazioni**

Le comunità umane hanno la necessità di comprendere i comportamenti collettivi che si generano al loro interno, ovvero di studiare la **dinamica delle popolazioni**.

Quando l'Analisi Matematica... osserva le popolazioni

Le comunità umane hanno la necessità di comprendere i comportamenti collettivi che si generano al loro interno, ovvero di studiare la **dinamica delle popolazioni**.

- ▶ Problema più antico (**Fibonacci**): *come si comportano una o più specie che interagiscono in uno spazio limitato?*

Quando l'Analisi Matematica... osserva le popolazioni

Le comunità umane hanno la necessità di comprendere i comportamenti collettivi che si generano al loro interno, ovvero di studiare la **dinamica delle popolazioni**.

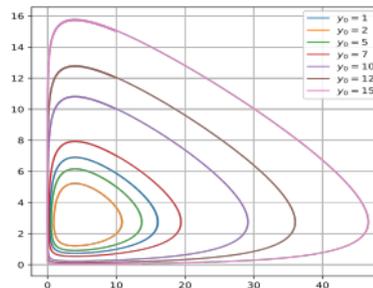
- ▶ Problema più antico (**Fibonacci**): *come si comportano una o più specie che interagiscono in uno spazio limitato?* **Malthus, Verhulst, Volterra**

Quando l'Analisi Matematica... osserva le popolazioni

Le comunità umane hanno la necessità di comprendere i comportamenti collettivi che si generano al loro interno, ovvero di studiare la **dinamica delle popolazioni**.

- Problema più antico (**Fibonacci**): *come si comportano una o più specie che interagiscono in uno spazio limitato?* **Malthus, Verhulst, Volterra**

Proposta tesi: **Modello preda-predatore (Morandotti)**.



en.wikipedia.org/wiki/Lotka-Volterra_equations

Quando l'Analisi Matematica... osserva le popolazioni

Le comunità umane hanno la necessità di comprendere i comportamenti collettivi che si generano al loro interno, ovvero di studiare la **dinamica delle popolazioni**.

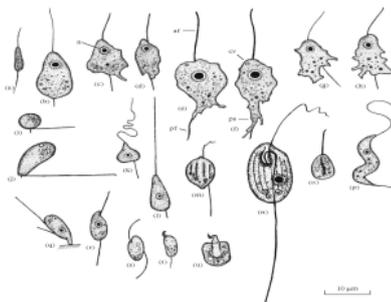
- ▶ Controllo dei moti collettivi: *si può indirizzare il moto di mini-agenti per fargli svolgere collettivamente attività?*

Quando l'Analisi Matematica... osserva le popolazioni

Le comunità umane hanno la necessità di comprendere i comportamenti collettivi che si generano al loro interno, ovvero di studiare la **dinamica delle popolazioni**.

- Controllo dei moti collettivi: *si può indirizzare il moto di mini-agenti per fargli svolgere collettivamente attività?*

Proposta tesi: **Micro-nuotatori flagellati** (Morandotti-Zoppello).



Prokina-Mylnikov, Doi:10.1134/S1995082917020110 (2017)

Quando l'Analisi Matematica... osserva le popolazioni

Le comunità umane hanno la necessità di comprendere i comportamenti collettivi che si generano al loro interno, ovvero di studiare la **dinamica delle popolazioni**.

- ▶ Mobilità e spostamenti vincolati: *cosa succede quando un grande numero di agenti si muove lungo determinate direttrici?*

Quando l'Analisi Matematica... osserva le popolazioni

Le comunità umane hanno la necessità di comprendere i comportamenti collettivi che si generano al loro interno, ovvero di studiare la **dinamica delle popolazioni**.

- Mobilità e spostamenti vincolati: *cosa succede quando un grande numero di agenti si muove lungo determinate direttrici?*

Proposta tesi: **Modelli di traffico** (Dovetta–Tentarelli).



www.torinotoday.it/cronaca/Baldissera-traffico-polemiche.html



Quando l'Analisi Matematica... pensa la Meccanica Quantistica

Quando l'Analisi Matematica... pensa la Meccanica Quantistica

Quando all'inizio del '900 la Meccanica Classica fallisce nella descrizione delle particelle subatomiche, nasce la Meccanica Quantistica.

Quando l'Analisi Matematica... pensa la Meccanica Quantistica

Quando all'inizio del '900 la Meccanica Classica fallisce nella descrizione delle particelle subatomiche, nasce la Meccanica Quantistica.

- ▶ Approccio di Heisenberg (1927): è possibile conoscere contemporaneamente posizione e momento di *una* particella?

Quando l'Analisi Matematica... pensa la Meccanica Quantistica

Quando all'inizio del '900 la Meccanica Classica fallisce nella descrizione delle particelle subatomiche, nasce la Meccanica Quantistica.

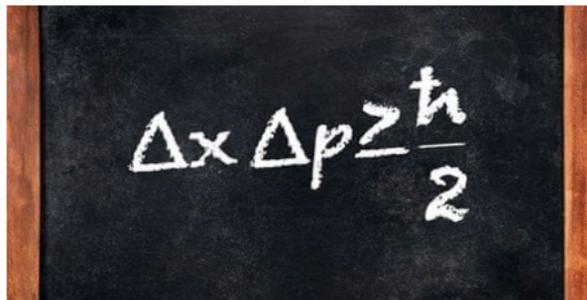
- ▶ Approccio di Heisenberg (1927): è possibile conoscere contemporaneamente posizione e momento di una particella? NO

Quando l'Analisi Matematica... pensa la Meccanica Quantistica

Quando all'inizio del '900 la Meccanica Classica fallisce nella descrizione delle particelle subatomiche, nasce la Meccanica Quantistica.

- ▶ Approccio di Heisenberg (1927): è possibile conoscere contemporaneamente posizione e momento di *una* particella? NO

Proposta tesi: Gruppo di Heisenberg (Martini).


$$\Delta x \Delta p \geq \frac{\hbar}{2}$$

www.theguardian.com/science/2013/nov/10/what-is-heisenbergs-uncertainty-principle

Quando l'Analisi Matematica... pensa la Meccanica Quantistica

Quando all'inizio del '900 la Meccanica Classica fallisce nella descrizione delle particelle subatomiche, nasce la Meccanica Quantistica.

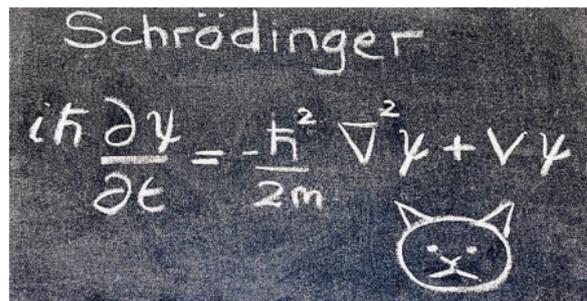
- ▶ Approccio di Schrödinger (1925-26): *come evolve la probabilità di trovare una particella in un punto dello spazio?*

Quando l'Analisi Matematica... pensa la Meccanica Quantistica

Quando all'inizio del '900 la Meccanica Classica fallisce nella descrizione delle particelle subatomiche, nasce la Meccanica Quantistica.

- ▶ Approccio di Schrödinger (1925-26): *come evolve la probabilità di trovare una particella in un punto dello spazio?*

Proposta tesi: **Operatori autoaggiunti** (Dovetta–Tentarelli).



Schrödinger

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi + V \psi$$

A simple line drawing of a cat's face is drawn in the bottom right corner of the chalkboard.

geoffneilsen.wordpress.com/2012/08/03/erwin-schrodinger-1887-1961/

Quando l'Analisi Matematica... pensa la Meccanica Quantistica

Quando all'inizio del '900 la Meccanica Classica fallisce nella descrizione delle particelle subatomiche, nasce la Meccanica Quantistica.

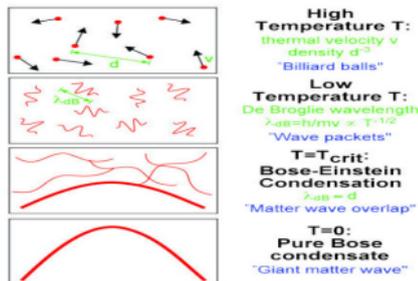
- ▶ Condensati di Bose-Einstein: *come si comportano tante particelle quando la loro temperatura è portata allo 0 Kelvin?*

Quando l'Analisi Matematica... pensa la Meccanica Quantistica

Quando all'inizio del '900 la Meccanica Classica fallisce nella descrizione delle particelle subatomiche, nasce la Meccanica Quantistica.

- Condensati di Bose-Einstein: *come si comportano tante particelle quando la loro temperatura è portata allo 0 Kelvin?*

Proposta tesi: **Stati fondamentali (Adami).**



Durfee-Ketterle, Doi:10.1364/OE.2.000299 (1998).



Quando l'Analisi Matematica... studia la Geometria

Quando l'Analisi Matematica... studia la Geometria

Il modo in cui l'Analisi Matematica studia la Geometria è dato dalla Teoria Geometrica della Misura. Interviene nello studio di oggetti "irregolari".

Quando l'Analisi Matematica... studia la Geometria

Il modo in cui l'Analisi Matematica studia la Geometria è dato dalla **Teoria Geometrica della Misura**. Interviene nello studio di oggetti "irregolari".

- ▶ Problema classico: *è possibile studiare oggetti di dimensione non intera? E si possono "misurare"?*

Quando l'Analisi Matematica... studia la Geometria

Il modo in cui l'Analisi Matematica studia la Geometria è dato dalla **Teoria Geometrica della Misura**. Interviene nello studio di oggetti "irregolari".

- ▶ Problema classico: *è possibile studiare oggetti di dimensione non intera? E si possono "misurare"?* **SI**

Quando l'Analisi Matematica... studia la Geometria

Il modo in cui l'Analisi Matematica studia la Geometria è dato dalla **Teoria Geometrica della Misura**. Interviene nello studio di oggetti "irregolari".

- ▶ Problema classico: *è possibile studiare oggetti di dimensione non intera? E si possono "misurare"?* **SI**

Proposta tesi: **Misure di Hausdorff** (Morandotti).



www.treehugger.com/amazing-fractals-found-in-nature-4868776



Quando l'Analisi Matematica... **guarda se stessa**

Quando l'Analisi Matematica... **guarda se stessa**

Nel '900 c'è stato uno sviluppo esponenziale rispetto ai secoli precedenti dovuto ad un radicale cambio di approccio (figlio del **Programma di Hilbert**).

Quando l'Analisi Matematica... guarda se stessa

Nel '900 c'è stato uno sviluppo esponenziale rispetto ai secoli precedenti dovuto ad un radicale cambio di approccio (figlio del **Programma di Hilbert**).

- ▶ Proprietà fini delle funzioni (**Jordan**): *come si possono studiare le variazioni di funzioni molto irregolari?*

Quando l'Analisi Matematica... guarda se stessa

Nel '900 c'è stato uno sviluppo esponenziale rispetto ai secoli precedenti dovuto ad un radicale cambio di approccio (figlio del **Programma di Hilbert**).

- ▶ Proprietà fini delle funzioni (**Jordan**): *come si possono studiare le variazioni di funzioni molto irregolari?*

Proposta tesi: **Funzioni a variazione limitata** (Morandotti).



en.wikipedia.org/wiki/Cantor_function

Quando l'Analisi Matematica... **guarda se stessa**

Nel '900 c'è stato uno sviluppo esponenziale rispetto ai secoli precedenti dovuto ad un radicale cambio di approccio (figlio del **Programma di Hilbert**).

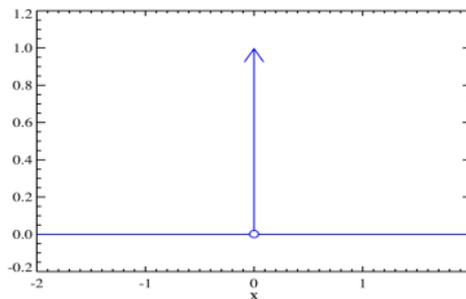
- ▶ Teoria delle distribuzioni (**Schwartz**): *come si possono derivare funzioni... che non si possono derivare?*

Quando l'Analisi Matematica... guarda se stessa

Nel '900 c'è stato uno sviluppo esponenziale rispetto ai secoli precedenti dovuto ad un radicale cambio di approccio (figlio del **Programma di Hilbert**).

- ▶ Teoria delle distribuzioni (**Schwartz**): *come si possono derivare funzioni... che non si possono derivare?*

Proposta tesi: **Teorema del nucleo di Schwartz (Martini)**.



it.wikipedia.org/wiki/Delta_di_Dirac

Quando l'Analisi Matematica... **guarda se stessa**

Nel '900 c'è stato uno sviluppo esponenziale rispetto ai secoli precedenti dovuto ad un radicale cambio di approccio (figlio del **Programma di Hilbert**).

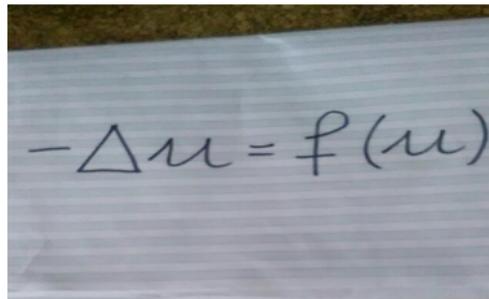
- ▶ Equazioni differenziali alle derivate parziali non lineari: *come si capisce se ammettono soluzione? E quante soluzioni ammettono?*

Quando l'Analisi Matematica... guarda se stessa

Nel '900 c'è stato uno sviluppo esponenziale rispetto ai secoli precedenti dovuto ad un radicale cambio di approccio (figlio del [Programma di Hilbert](#)).

- ▶ Equazioni differenziali alle derivate parziali non lineari: *come si capisce se ammettono soluzione? E quante soluzioni ammettono?*

Proposta tesi: **Analisi non lineare** (Dovetta–Tentarelli).


$$-\Delta u = f(u)$$

Quando l'Analisi Matematica... **guarda se stessa**

Nel '900 c'è stato uno sviluppo esponenziale rispetto ai secoli precedenti dovuto ad un radicale cambio di approccio (figlio del **Programma di Hilbert**).

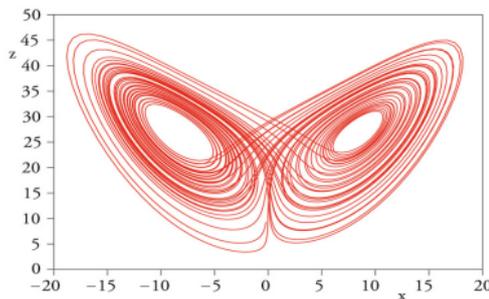
- ▶ Evoluzione dei fenomeni: *come si studia l'evoluzione temporale di quantità che si influenzano mutuamente?*

Quando l'Analisi Matematica... guarda se stessa

Nel '900 c'è stato uno sviluppo esponenziale rispetto ai secoli precedenti dovuto ad un radicale cambio di approccio (figlio del **Programma di Hilbert**).

- ▶ Evoluzione dei fenomeni: *come si studia l'evoluzione temporale di quantità che si influenzano mutuamente?*

Proposta tesi: **Sistemi dinamici** (Morandotti).



https://www.treccani.it/enciclopedia/caos-deterministico_%28Enciclopedia-della-Scienza-e-della-Tecnica%29/

- ▶ Riccardo Adami (riccardo.adami@polito.it):
 - *Stati fondamentali di sistemi quantistici.*
- ▶ Simone Dovetta (simone.dovetta@polito.it),
Lorenzo Tentarelli (lorenzo.tentarelli@polito.it):
 - *Problemi isoperimetrici,*
 - *Modelli di traffico e leggi di conservazione,*
 - *Operatori autoaggiunti ed applicazioni alla Meccanica Quantistica,*
 - *Analisi non lineare: strategie per lo studio delle Equazioni Differenziali alle derivate Parziali non lineari.*
- ▶ Alessio Martini (alessio.martini@polito.it):
 - *Il gruppo di Heisenberg,*
 - *Il teorema del nucleo di Schwartz.*
- ▶ Marco Morandotti (marco.morandotti@polito.it):
 - *Γ -convergenza di funzionali integrali,*
 - *Il modello preda-predatore: analisi e applicazioni,*
 - *Interazione idrodinamica tra micro-nuotatori flagellati (con Marta Zoppello),*
 - *Misure di Hausdorff e applicazioni*
 - *Funzioni a variazione limitata e loro applicazioni,*
 - *Equilibrio e stabilità in sistemi dinamici.*



Thank you for the attention



**Politecnico
di Torino**